УДК 519.63

МНОГОСЕТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ[1)]

С.В. ТИХОВСКАЯ

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
E-mail s.tihovskaya@yandex.ru

MULTIGRID ALGORITHM FOR SOLUTION ELLIPTIC PROBLEM WITH BOUNDARY LAYERS

S.V. TIKHOVSKAYA

Sobolev Mathematics Institute of SB RAS

Аннотация

Исследуется многосеточный алгоритм для решения для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Рассматривается разностная схема, обладающая свойством равномерной сходимости по малому параметру, на сетке Шишкина. Применяется экстраполяция Ричардсона для повышения точности разностного решения. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: Пограничный слой, эллиптическая задача, разностная схема, ε-равномерная сходимость, сетка Шишкина, экстраполяция Ричардсона

Summary

A multigrid algorithm for the elliptic equation with a small parameter ε multiplying the highest derivative is investigated. The difference scheme with property of ε-uniform convergence on Shishkin mesh is considered. To increase the accuracy, the Richardson extrapolation is applied. Numerical results are discussed.

Key words: Boundary layer, elliptic problem, difference scheme, ε-uniform convergence, Shishkin mesh, Richardson extrapolation.

Введение

Рассматривается двумерная линейная эллиптическая задача с регулярными пограничными слоями. Обеспечить равномерную сходимость разностной схемы для такой задачи можно основываясь на одном из известных подходов: сгущением сетки в областях пограничного слоя [1] или подгонкой схемы к погранслойным составляющим [2, 3]. В обоих случаях пятиточечная разностная схема представляет собой систему линейных уравнений, которую можно разрешить на основе итераций. Известно, что применение многосеточного метода приводит к существенному сокращению количества арифметических действий. Многосеточные методы для эллиптических задач с преобладающей конвекцией исследованы в ряде работ, например [4–7]. Из многосеточных методов выделяется класс двухсеточных, исследованных в [8, 9] и других работах. В [10] исследован двухсеточный метод с использованием экстраполяции Ричардсона для повышения точности разностного решения и показано, что в случае вспомогательной сетки с числом узлов вдвое меньшим, чем у исходной, достигается точность на порядок выше. В данной работе исследуется многосеточный алгоритм такой же структуры и для простоты сравнения используется дополнительно только ещё одна вспомогательная сетка с числом узлов в четыре раза меньше, чем у исходной.

1) Работа выполнена при поддержке РФФИ проект 13-01-00618 и ОМН РАН проект 1.3.2 (2012)

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную сингулярно возмущенную эллиптическую краевую задачу:

$$\begin{gathered}\varepsilon u_{xx}+\varepsilon u_{yy}+a(x)u_x+b(y)u_y-c(x,y)u=f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega;\\ u(x,y)=g(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\Omega=(0,1)^2$, $\Gamma=\overline{\Omega}\setminus\Omega$, функции a, b, c, f, g — достаточно гладкие,

$$a(x)\geqslant\alpha>0,\quad b(y)\geqslant\beta>0,\quad c(x,y)\geqslant 0,\quad \varepsilon>0.\tag{2}$$

Известно [3], что при выполнении условий (2) решение задачи (1) является равномерно ограниченным и имеет два регулярных пограничных слоя у границ $x=0$ и $y=0$.

Зададим в области $\overline{\Omega}$ кусочно-равномерную сетку [3]:

$$\Omega_N=\{(x_i,y_j),\ i,j=0,1,2,\dots,N,\ h_i=x_i-x_{i-1},\ \tau_j=y_j-y_{j-1},\ x_0=0,\ x_N=1,\ y_0=0,\ y_N=1\},$$

где

$$\begin{gathered}h_i=2\sigma_x/N,\quad 1\leqslant i\leqslant N/2;\qquad h_i=2(1-\sigma_x)/N,\quad N/2<i\leqslant N,\\ \tau_j=2\sigma_y/N,\quad 1\leqslant j\leqslant N/2;\qquad \tau_j=2(1-\sigma_y)/N,\quad N/2<j\leqslant N,\\ \sigma_x=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\},\quad \sigma_y=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2\varepsilon}{\beta}\ln N\right\}.\end{gathered}\tag{3}$$

На заданной сетке Ω_N выпишем схему направленных разностей:

$$\begin{gathered}\frac{2\varepsilon}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{u^N_{i+1,j}-u^N_{i,j}}{h_{i+1}}-\frac{u^N_{i,j}-u^N_{i-1,j}}{h_i}\right)+\\ +\frac{2\varepsilon}{\tau_j+\tau_{j+1}}\left(\frac{u^N_{i,j+1}-u^N_{i,j}}{\tau_{j+1}}-\frac{u^N_{i,j}-u^N_{i,j-1}}{\tau_j}\right)+a(x_i)\frac{u^N_{i+1,j}-u^N_{i,j}}{h_{i+1}}+\\ +b(y_j)\frac{u^N_{i,j+1}-u^N_{i,j}}{\tau_{j+1}}-c(x_i,y_j)u^N_{i,j}=f(x_i,y_j),\quad (x_i,y_j)\in\Omega_N,\\ u^N_{i,j}=g(x_i,y_j),\qquad (x_i,y_j)\in\Gamma_N=\Gamma\cap\Omega_N.\end{gathered}\tag{4}$$

Отметим, что матрица схемы (4) является М-матрицей. В соответствии с [3, 11] выполнено:

$$\|u^N-[u]_{\Omega_N}\|_N\leqslant C\Delta_N,\qquad \Delta_N=\ln N/N,$$

где C − положительная постоянная, не зависящая от параметра ε и шагов сетки (3).

2. Многосеточный алгоритм.

Применение многосеточных методов приводит к существенной экономии в числе арифметических действий при решении краевых задач. Впервые многосеточный метод был предложен Р.П. Федоренко [12]. Исследуем многосеточный алгоритм со структурой, аналогичной рассмотренной в [10], и сравним с предложенным двухсеточным алгоритмом. Добавим дополнительно только ещё одну вспомогательную сетку, таким образом получим алгоритм, в котором задействованы две вложенные в исходную вспомогательные сетки с числом узлов в два и четыре раза меньше, чем у исходной. На последнем этапе алгоритма также, как и в случае двухсеточного [10], будем использовать экстраполяцию Ричардсона [13, 14] для повышения точности разностного решения.

Решение u^N схемы направленных разностей (4) вычисляется на сетке Ω_N. Для повышения точности будем также использовать решение этой схемы на сетке Ω_n, которая содержит $n = N/2$ сеточных интервалов и имеет те же параметры σ_x, σ_y, что и сетка Ω_N. Эти сетки вложены так, что $\Omega_n = \{(X_l, Y_m)\} \subset \Omega_N = \{(x_i, y_j)\}$.

Обозначим решение схемы (4) на Ω_n как u^n и пусть $k_n = -n/(N-n)$, $k_N = N/(N-n)$. В соответствии с методом экстраполяции Ричардсона зададим функцию u^{nN} на сетке Ω_N, приближающую решение $u(x,y)$ с более высоким порядком точности, чем u^N. Для этого сначала в узлах вспомогательной сетки Ω_n определим сеточную функцию u^{nN} следующим образом:

$$u^{nN}(X_l, Y_m) = k_n u^n(X_l, Y_m) + k_N u^N(X_l, Y_m), \qquad (X_l, Y_m) \in \Omega_n.$$

В узлах исходной сетки Ω_N, не совпадающих с узлами сетки Ω_n, зададим сеточную функцию $u^{nN}(x_i, y_j)$, используя интерполяцию. Тогда для каждого узла $(x_i, y_j) \in \Omega_N$, принадлежащего некоторой ячейке $S_{l,m} = [X_{l-1}, X_{l+1}] \times [Y_{m-1}, Y_{m+1}]$, определим:

$$u^{nN}(x_i, y_j) = I([u^{nN}]_{\Omega_n}, x_i, y_j), \tag{5}$$

где при реализации формулы (5) будем использовать квадратическую интерполяцию.

3. Результаты численных экспериментов.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x + u_y - 2u = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma, \end{gathered} \tag{6}$$

где f соответствует решению

$$u(x,y) = (1-x)\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)}\,(1-y)\,\frac{\left(1 - e^{-\frac{y}{\varepsilon}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)} + \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Решение задачи (6) находим на основе схемы (4). Начальное приближение для используемых итерационных методов задаем следующим образом:

$$u^{(0)}(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Omega_N$$

Исследуем реализацию схемы (4) на основе явного метода Зейделя [15]. Пятиточечную схему (4) можно представить как

$$a_{i,j} u^N_{i-1,j} + b_{i,j} u^N_{i,j-1} + c_{i,j} u^N_{i+1,j} + d_{i,j} u^N_{i,j+1} - e_{i,j} u^N_{i,j} = f^N_{i,j}, \quad 0 < i, j < N.$$

Тогда векторно-матричная запись метода Зейделя будет иметь вид:

$$u^{(m)} = D^{-1}\left(f + L u^{(m)} + U u^{(m-1)}\right),$$

где

$$(Lv)_{i,j} = a_{i,j} v_{i-1,j} + b_{i,j} v_{i,j-1}, \qquad (Dv)_{i,j} = e_{i,j} v_{i,j}, \qquad (Uv)_{i,j} = c_{i,j} v_{i+1,j} + d_{i,j} v_{i,j+1},$$

а метод последовательной верхней релаксации [15] вид:

$$u^{(m)} = \omega D^{-1}\left(f + L u^{(m)} + U u^{(m-1)}\right) + (1-\omega) u^{(m-1)}$$

где ω — итерационный параметр.

Отметим, что в случае задачи (1) в соответствии с [16] метод Зейделя должен учитывать направление потока для уменьшения количества итераций. Тогда векторно-матричная запись метода Зейделя по потоку для задачи (1) будет иметь вид:

$$u^{(m)} = D^{-1}\left(f + Lu^{(m-1)} + Uu^{(m)}\right).$$

В табл. 1 при $\varepsilon = 10^{-4}$ проведено сравнение метода последовательной верхней релаксации и Зейделя по потоку по количеству итераций. Для метода последовательной верхней релаксации итерационный параметр $\omega = 2/(1+\sqrt{0.9})$, т. е. $\rho_s = 0.1$.

Табл. 1: Сравнение количества итераций, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метод	N			
	64	128	256	512
верхней релаксации	812(238)(85) 812(280) 995	2426(680)(240) 2426(828) 3074	7621(2054)(708) 7621(2578) 9935	24943(6539)(2214) 24943(8433) 33335
Зейделя по потоку	762(204)(66) 762(247) 953	2368(621)(205) 2368(776) 3050	7653(1974)(650) 7653(2526) 10094	25532(6511)(2142) 25532(8509) 34385

В табл. 2 при $\varepsilon = 10^{-4}$ проведено сравнение метода последовательной верхней релаксации и Зейделя по потоку по времени выполнения.

Табл. 2: Сравнение времени выполнения, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метод	N			
	64	128	256	512
верхней релаксации	0.309 0.262 0.245	2.581 2.707 2.949	38.046 40.332 46.631	839.113 1002.260 1203.228
Зейделя по потоку	0.228 0.224 0.314	2.348 2.563 4.046	37.734 38.686 65.051	968.296 978.060 1309.192

Применение экстраполяции Ричардсона приводит к повышению точности на порядок. Тем не менее следует отметить, что использование значений со всех сеток в формуле для экстраполяции может позволить повысить точность исходной схемы на два порядка, но этот вопрос требует дальнейшего изучения.

4. Заключение.

Использование многосеточного алгоритма приводит к выигрышу за счёт уменьшения количества итераций на вспомогательных сетках и соответственно к выигрышу по времени выполнения. С увеличением размерности задачи растёт преимущество многосеточного алгоритма и даже добавление всего одной сетки дает ощутимое преимущество перед двухсеточным алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. – 1969. – Т. 6, № 2. – С. 237–248.
2. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 232 с.
4. **Gaspar F.J., Clavero C., Lisbona F.** Some numerical experiments with multigrid methods on Shishkin meshes // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – V. 138. – C. 21–35.
5. **Hackbusch W.** Multigrid convergence for a singular perturbation problem // Linear Algebra and its Applications. – 1984. – V. 58. – C. 125–145.
6. **Olshanskii M.A.** Analysis of a Multigrid Method for Convection-Diffusion Equations with the Dirichlet Boundary Conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2004. – V. 44, № 8. – C. 1374–1403.
7. **Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schuller A.** Multigrid. – San Diego: Academic Press Inc, 2001. – 631 p.
8. **Axelsson O., Layton W.** A two-level discretization of nonlinear boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33 – P. 2359–2374.
9. **Xu J.** A novel two-grid method for semilinear elliptic equation // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – V. 15. – P. 231–237.
10. **Тиховская С.В.** Двухсеточный метод для эллиптического уравнения с пограничными слоями на сетке Шишкина // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 49–56.
11. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Volume 24 of Springer series in Computational Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
12. **Федоренко Р.П.** О скорости сходимости одного итерационного процесса // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 559–564.
13. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** A Higher-Order Richardson Method for a Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Reaction-Diffusion Equation // Differential Equations. – 2005. – V. 41, № 7. – P. 1030–1039.
14. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Volume 140 of Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009. – 408 p.
15. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ, 2001. – 318 с.
16. **Han H., Il'in V.P., Kellogg R.B.** Flow directed iterations for convection dominated flow // Proceeding of the Fifth Int. Conf. on Boundary and Interior Layers. – 1988. – P. 7–17.

REFERENCES

1. **Il'in A.M.** Difference scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative [Raznostnaya skhema dlya differencial'nogo uravneniya s malym parametrom pri starshei proizvodnoi] // Mat. Zametki. – 1969. – V. 6, № 2. – P. 237–248. (in Russian)
2. **Bakhvalov N.S.** The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer [K optimizacii metodov resheniya kraevykh zadach pri nalichii pogranichnogo sloya] // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1969. – V. 9, № 4. – P. 841–859. (in Russian)

3. **Shishkin G.I.** Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations [Setochnye approximacii singulyarno vozmuschennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii]. – Ekaterinoburg: UB RAS, 1992. – 232 p. (in Russian)
4. **Gaspar F.J., Clavero C., Lisbona F.** Some numerical experiments with multigrid methods on Shishkin meshes // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – V. 138. – P. 21–35.
5. **Hackbusch W.** Multigrid convergence for a singular perturbation problem // Linear Algebra and its Applications. – 1984. – V. 58. – P. 125–145.
6. **Olshanskii M.A.** Analysis of a Multigrid Method for Convection-Diffusion Equations with the Dirichlet Boundary Conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2004. – V. 44, № 8. – P. 1374–1403.
7. **Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schuller A.** Multigrid. – San Diego: Academic Press Inc, 2001. – 631 p.
8. **Axelsson O., Layton W.** A two-level discretization of nonlinear boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33 – P. 2359–2374.
9. **Xu J.** A novel two-grid method for semilinear elliptic equation // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – V. 15. – P. 231–237.
10. **Tikhovskaya S.V.** Two-grid method for elliptic equation with boundary layers on Shishkin mesh [Dvukhsetochnyi metod dlya ellipticheskogo uravneniya s pogranichnymi sloyami na setke Shishkina] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2012. – V. 154, № 4. – P. 49–56. (in Russian)
11. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Volume 24 of Springer series in Computational Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
12. **Fedorenko R.P.** The speed of convergence of one iterative process [O skorosti skhodimosti odnogo iteracionnogo processa]// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1964. – V. 4, № 3. – P. 559–564. (in Russian)
13. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** A Higher-Order Richardson Method for a Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Reaction-Diffusion Equation // Differential Equations. – 2005. – V. 41, № 7. – P. 1030–1039.
14. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Volume 140 of Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009. – 408 p.
15. **Il'in V.P.** Methods of finite differences and final volumes for elliptic equations [Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob'emov dlya ellipticheskikh uravnenii]. – Novosibirsk: Publ. ICMMG, 2001. – 318 p. (in Russian)
16. **Han H., Il'in V.P., Kellogg R.B.** Flow directed iterations for convection dominated flow // Proceeding of the Fifth Int. Conf. on Boundary and Interior Layers. – 1988. – P. 7–17.